

# “钱乐之三百六十律”中的三种音差

陈应时（上海音乐学院 音乐学系，上海 200031）

[摘要] “钱乐之三百六十律”中的音差问题，历来受到国内外学者的关注。现经我重新推算后发现，在“钱乐之三百六十律”359个律间中具有三种规格的音差，作为主体部分的是“京房一日音差”，共305个；剩下的54个律间为“钱乐之三百六十律”所独有的音差，即53个“钱乐之小音差”和1个“钱乐之大音差”。“钱乐之大、小音差”的出现，充实和完善了三分损益律这一律制的音差系列。

[关键词] 钱乐之；三百六十律；京房一日音差；钱乐之大音差；钱乐之小音差

[中图分类号] J612；J609.2 [文献标识码] A [文章编号] 1008-9667-(2009)02-0001-06

西汉律学家京房曾在三分损益十二律的基础上继续生满六十律，后人称之为“京房六十律”。此后，南朝宋律学家钱乐之在“京房六十律”的基础上，继续用三分损益法生满三百六十律，后人称之为“钱乐之三百六十律”。此律在数目上是“京房六十律”的六倍，故其律间自然更密，于是就出现了比“京房一日音差”更小的音差。

最早关注到“钱乐之三百六十律”中音差的是日本音乐学家田边尚雄。他在《音乐原理》一书中采用他所首创的“平均音程值”，把“京房一日音差”（他称其为“京氏音差”）定作0.01781（合3.562音分）；把“钱乐之小音差”（他称其为“钱氏音差”）定作0.00950（合1.9音分）。<sup>[1]</sup>王光祈《东西乐制之研究》中的“京氏音差”音程值从田边氏；但他将田边氏的“钱氏音差”音程值修正为0.00743（合1.486音分）。<sup>[2]</sup><sup>44-62</sup>此后，我又在《中国古代文献记载中的“律学”》一文中将这一音差值修正为1.845音分。<sup>[3]</sup>最近，李宏峰在《“钱氏音差”解析》一文（以下简称“李文”）中又提出新的见解，认为钱乐之“360律中变律生还黄钟的最小音差，并非位于安运与黄钟之间。也就是说，钱氏音差应在360律范围内进一步缩小，而不是黄钟与安运间的1.845音分”，它“应位于第307律亿兆与黄钟之间，其数值为1.783874音分”。<sup>[4]</sup>

我认为李宏峰的新见解值得重视，尤其是他对“钱乐之小音差”的发现，功不可没。但经我重新推算了“钱乐之三百六十律”之后，发现其音差数据和“李文”计算结果尚有细小的差别，现提出来与大家共同商讨。

## 一、“钱乐之三百六十律”音差的结构布局

“钱乐之三百六十律”是在对“京房六十律”59个律间再细分而形成的。对于“京房六十律”的律间音差，我已作过计算，发现其中存在三种规格的音差：

- （1）“京房最大音差”：23.460010384649012933840792848556 音分，计34个；
- （2）“京房一日音差”：3.6150458655331404577968350811297音分，计7个；
- （3）“京房减一日音差”：19.844964519115872476043957767426音分，计18个。

收稿时间：2009-02-26

作者简介：陈应时（1933—），男，上海南汇人。博士生导师，上海音乐学院教授，研究方向：乐律学。

本文中所有我计算出的音分数值位数较多，已超过朱载堉“新法密率”25的位律数，故王殿志博士提醒，“因电脑CPU频率不同，最后几位的数字可能会出现差异”，请读者留意，以下不再说明。

以上三种数据的得出，其第一律黄钟的律数并未直接采用京房所定的177147，而是依据《淮南子》所云“置一而十一三之，为积分十七万七千一百四十七，黄钟大数立焉”的原理，采用“置一而五十九三之为积分”立黄钟大数，这样方可使“京房六十律”每一律的律数都成为整数，由此所得的数据更为精确<sup>[5]</sup>。但“钱乐之三百六十律”律的数目多，采用同样的方法立出的黄钟实数更大更长，会给计算带来不便，故改用了分数的方法进行算律，然后再转成音分。为简明醒目起见，现将推算结果制成下表：

“钱乐之三百六十律”音差结构布局表

下生	下生	下生	下生	下生	上生	上生	上生	上生	上生	上生	上生
1黄钟	8大吕	3太簇	10夹钟	5姑洗	12中吕	7蕤宾	2林钟	9夷则	4南吕	11无射	6应钟
1. 845+	(京房一日音差) 3. 6150458655331404577968350811352音分(简式:3. 615+音分)										
360安运											
1. 769+											
54色育 <sup>①</sup>	61菱动	56未知	63明庶	58南授	65宋明	60南事	55谦侍	62升商	57白吕	64思冲	59分乌
(京房一日音差)	3. 6150458655331404577968350811352音分(简式:3. 615+音分)										
107含微	114始贲	109己己	116协倡	111杯来	118启运	113谧静	108崇德	115清爽	110捐秀	117怀谦	112祖微
(京房一日音差)	3. 6150458655331404577968350811352音分(简式:3. 615+音分)										
160帝德	167大有	162义建	169阴贲	164考神	171景风	166则选	161循道	168气精	163敦实	170恭俭	165据始
(京房一日音差)	3. 6150458655331404577968350811352音分(简式:3. 615+音分)										
213广运	220坤元	215苒毒	222风从	217方显	224初缓	219布亨	214方壮	221阴德	216素风	223休老	218功成
(京房一日音差)	3. 6150458655331404577968350811352音分(简式:3. 615+音分)										
266下济	273辅时	268条风	275布政	270携角	277羽物	272满羸	267阴升	274白臧	269劬物	276恤衣	271又定
(京房一日音差)	3. 6150458655331404577968350811352音分(简式:3. 615+音分)										
319克终	326匡弼	321湊始	328力化	233洗陈	330斯畜	325潜动	320摩恩	327御叙	322酉稔	329销祥	324静谧
(钱乐之小音差)	1. 769735191450170187059782361776音分(简式:1. 769+音分)										
13执始	20分否	15时息	22升时	17变虞	24南中	19盛变	14去火	21鲜刑	16结躬	23闭奄	18迟内
(京房一日音差)	3. 6150458655331404577968350811352音分(简式:3. 615+音分)										
66握鉴	73又繁	68达生	75震德	70摧颖	77离春	72宾安	67华销	74贞克	69肥通	76降娄	71无为
(京房一日音差)	3. 6150458655331404577968350811352音分(简式:3. 615+音分)										
119持枢	126唯微	121匏泰	128乘条	123嘉气	130率农	125怀远	120朋庆	127金天	122羸中	129臧遂	124而又
(京房一日音差)	3. 6150458655331404577968350811352音分(简式:3. 615+音分)										
172黄中	179乔望	174初角	181芬芳	176始升	183有程	178声暨	173云布	180刘弥	175晟阴	182日在	177姑射
(京房一日音差)	3. 6150458655331404577968350811352音分(简式:3. 615+音分)										
225通圣	232庶几	227少阳	234散朗	229脚云	236南讹	231轨同	226均任	233会道	228抗节	235旋春	230凝晦
(京房一日音差)	3. 6150458655331404577968350811352音分(简式:3. 615+音分)										
278潜升	285执义	280柔桡	287淑气	282媚岭	289敬致	284海水	279仰成	286归仁	281威远	288阍臧	283动寂
(京房一日音差)	3. 6150458655331404577968350811352音分(简式:3. 615+音分)										
331殷普	338秉强	333商音	340风驰	335疏道	342相趣	337息沴	332宽中	339阴倡	334有截	341明奎	336应微
(钱乐之小音差)	1. 769735191450170187059782361776音分(简式:1. 769+音分)										
25景盛	32陵阴	27屈齐	34族嘉	29路时	36内负	31离躬	26安度	33去南	28归期	35邻齐	30未育
(京房一日音差)	3. 6150458655331404577968350811352音分(简式:3. 615+音分)										
78滋萌	85倡阳	80扶弱	87曩党	82日旅	89朱草	84安壮	79德均	86阳消	81中德	88轨众	83万机
(京房一日音差)	3. 6150458655331404577968350811352音分(简式:3. 615+音分)										
131光被	138识沈	133承齐	140四厥	135实沈	142含辉	137崇明	132无蹇	139柔辛	134王猷	141大蓄	136万寿
(京房一日音差)	3. 6150458655331404577968350811352音分(简式:3. 615+音分)										
184咸亨	191緝熙	186动植	193种生	188炎风	195屈轶	190远眺	185礼溢	192延乙	187允塞	194畜致	189无疆
(京房一日音差)	3. 6150458655331404577968350811352音分(简式:3. 615+音分)										
237乃文	244知道	239咸耀	246恣性	241首节	248曜畴	243升中	238智深	245和庚	240摩收	247下济	242地久
(京房一日音差)	3. 6150458655331404577968350811352音分(简式:3. 615+音分)										
290乃圣	297适时	292兼山	299逍遥	294柔条	301旦气	296凤翥	291任肃	298靡卉	293搏轸	300息肩	295天长
(京房一日音差)	3. 6150458655331404577968350811352音分(简式:3. 615+音分)										
343咸阳	350权变	345止速	352仁威	347方结	354清和	349朝阳	344纯恪	351莠晋	346播落	353无边	348修复
(钱乐之小音差)	1. 769735191450170187059782361776音分(简式:1. 769+音分)										
37分动	44少出	39随期	46争南	41刑始	48物应	43制时	38归嘉	45分积	40未卯	47期保	42迟时
(京房一日音差)	3. 6150458655331404577968350811352音分(简式:3. 615+音分)										
90生气	97阿衡	92龙跃	99旭旦	94方齐	101戒弊	96端通	91美音	98孔修	93质随	100延年	95方制
(京房一日音差)	3. 6150458655331404577968350811352音分(简式:3. 615+音分)										
143云繁	150同云	145勾芒	152晨朝	147物华	154荒落	149鸛火	144温风	151九德	146分满	153秋深	148无休
(京房一日音差)	3. 6150458655331404577968350811352音分(简式:3. 615+音分)										
196郁湮	203承明	198调序	205生遂	200革夷	207贞轸	202义次	197候节	204咸苾	199道心	206野色	201九野
(京房一日音差)	3. 6150458655331404577968350811352音分(简式:3. 615+音分)										
249升引	256善述	251青要	258群分	253茂实	260天庭	255高焰	250蓂华	257金惟	252贞坚	259玄月	254八荒
(京房一日音差)	3. 6150458655331404577968350811352音分(简式:3. 615+音分)										
302屯结	309休光	304结萼	311洁新	306登明	313祚周	308其煌	303绣岭	310俾义	305蓄止	312澄天	307亿兆
(京房一日音差)	3. 6150458655331404577968350811352音分(简式:3. 615+音分)										
355开元		357延敷		359壮进			356物无		358归藏		
(钱乐之小音差)	1. 769735191450170187059782361776音分(简式:1. 769+音分)										
49质末		51刑晋		53依行			50否与		52夷汗		
(京房一日音差)	3. 6150458655331404577968350811352音分(简式:3. 615+音分)										
102傻昧		104辨秩		106少选			103景口		105均义		
(京房一日音差)	3. 6150458655331404577968350811352音分(简式:3. 615+音分)										
155迪建		157东作		159道从			156曜井		158悦使		
(京房一日音差)	3. 6150458655331404577968350811352音分(简式:3. 615+音分)										
208玄中		210赞扬		212朱献			209日焕		211亡劳		
(京房一日音差)	3. 6150458655331404577968350811352音分(简式:3. 615+音分)										
261玉烛		263怠滞		265扬庭			262重轮		264九有		
(京房一日音差)	3. 6150458655331404577968350811352音分(简式:3. 615+音分)										
314调风		316傲落		318含贞			315财华		317光贲		
(钱乐之小音差)	1. 769735191450170187059782361776音分(简式:1. 769+音分)										
(8大吕)	(3太簇)	(10夹钟)	(5姑洗)	(12中吕)	(7蕤宾)	(2林钟)	(9夷则)	(4南吕)	(11无射)	(6应钟)	
35律	27律	34律	27律	34律	27律	27律	34律	27律	34律	27律	27律
大半音	小半音	大半音	小半音	大半音	小半音	小半音	大半音	小半音	大半音	小半音	小半音

《隋书·律历志》作“包育”。见魏征等.隋书（第二册）[M].北京：中华书局，1973：397-401.

由上表可以看出,“钱乐之三百六十律”359个律间中存在着三种规格的音差:

- (1)“京房一日音差”:3.6150458655331404577968350811352(简式:3.615+)音分,计305个;
- (2)“钱乐之大音差”:1.8453106740829702707370527190324(简式:1.845+)音分,计1个;
- (3)“钱乐之小音差”:1.769735191450170187059782361776(简式:1.769+)音分,计53个。

## 二、“钱乐之三百六十律”音差值的差异及其原因

如上三种音差数值和“李文”中相应的数值均有差异:“李文”计“京房一日音差”为“0.01806298(全音),合3.612596音分”,计“钱乐之大音差”为“0.00914361(全音),合1.828722音分”,计“钱乐之小音差”为“0.00891937(全音),合1.783874音分”。

形成以上音差数值的差异,主要原因可能是由于“李文”计十二平均律纯五度、纯四度和三分损益律纯五度、纯四度的音高差均为“0.00977477(全音),合1.954954音分”(“李文”用“ ”符号表示)所引起的。按我计算十二平均律纯五度、纯四度和三分损益律纯五度、纯四度的音高差为1.9550008653874177444867327372音分,合0.0097750043269370887224336636868991(全音),但“李文”得出的这一平均音程值,单以前九位数(0.00977477)计(不计其被省略了的尾数),就少了0.00000023(全音),合0.000046音分。这一数字看起来微乎其微,但在“钱乐之三百六十律”中多次三分损益上下相生,其积累起来数目却不可忽视。现结合“钱乐之三百六十律”中的三种音差数值加以分析。

“李文”计算的“京房一日音差”为“0.01806298(全音),合3.612596音分”,从其“ $359 - 3\frac{1}{2}$ ”算式可以看出,这里包含了359个十二平均律纯五度、纯四度和三分损益律纯五度、纯四度的音高差,每一个音高差少了0.00000023(全音),359次上下相生的音高差积累为0.00001219(全音),合0.002438音分。把这个音分差额补进3.612596音分中去,即可得3.615034音分。这与我所推算的“京房一日音差”音分数3.6150458655331404577968350811352的前五位数相符。

“李文”计算的“钱乐之大音差”为“0.00914361(全音),合1.828722音分”,从其“ $359 - \frac{1}{2}$ ”算式可以看出,这里包含了359个十二平均律纯五度、纯四度和三分损益律纯五度、纯四度的音高差,每一个音高差少了0.00000023(全音),359次上下相生的音高差积累为0.00008257(全音),合0.016514音分。把这个音分差额补进1.8287228音分中去,即可得1.845236音分。这与我所推算的“钱乐之大音差”音分数1.8453106740829702707370527190324的前四位数相符。

“李文”计“钱乐之小音差”为“0.00891937(全音),合1.783874音分”,从其“ $3 - 306$ ”算式可以看出,这里包含了306个十二平均律纯五度、纯四度和三分损益律纯五度、纯四度的音高差,每一个音高差少了0.00000023(全音),合0.000046音分,306次上下相生的音高差积累为0.00007038(全音),合0.014076音分。若在“李文”所计“钱乐之小音

即“李文”所称“京房音差”。

$$1200 \log_2 \left( \left( 1 + \frac{2}{3} \right)^2 \times \left( 1 + \frac{4}{3} \right)^1 \right)$$

此音差“李文”未命名。

$$1200 \log_2 \left( \left( 1 + \frac{3}{2} \right)^{149} \times \left( 1 + \frac{3}{4} \right)^{210} \right)$$

“李文”称“钱氏音差”。

$$1200 \log_2 \left[ \left( \left( 1 + \frac{2}{3} \right)^2 \times \left( 1 + \frac{4}{3} \right)^1 \right) + \left( \left( 1 + \frac{2}{3} \right)^{149} \times \left( 1 + \frac{3}{4} \right)^{210} \right) \right]$$

“李文”称“京房音差”。

“李文”未命名此音差。

“李文”称“钱氏音差”。

$$1200 \log_2 \left( \left( 1 + \frac{2}{3} \right) \right) - 700$$

“李文”称“古京差额”。



从以上两者的误差度来看,显然前者要比后者小。因此现在可以说,“钱乐之小音差”不是“李文”所确定的1.783874音分,而是1.769735191450170187059782361776音分,若以保留小数点后三位数计,则可简称为1.769+音分。“钱乐之大音差”也不是“李文”确定的1.828722音分,而是1.8453106740829702707370527190324音分,若以保留小数点后三位数计,则可简称为1.845+音分。

### 三、“安运”律的律位和三分损益律的音差系列

关于“钱乐之三百六十律”中“安运”律的律位,由于此律经359次三分损益上下相生之后,比“应钟”律高了四个“京房最大音差”,其实际音高已超过半律黄钟。田边尚雄最早在计算因“安运”律而产生的音差时,书中未列计算公式,只列出“钱氏音差”的平均音程值为“0.00950”,并未涉及到“安运”律的律位问题。王光祈则在《东西乐制之研究》一书中注意到了这一点,他在书中说:

其中安运一律,本来是应该由壮进上生而得的,其数为0.00743,位当在黄钟、色育之间。但是本书因为按照《隋书》所载,安运一律系由壮进下生而得,其数当为6.00743,因而位在亿兆之次,且已超过一个音级,比半黄钟为高(半黄钟之数假定为6.00000)……。兹将两种生法所得之结果,比较如下。(依照《隋书》所载当如此)(其实照理应当如此)两种计算虽异,而结果则同,其差数均为0.00743,我们可以称之为钱氏音差(Komma)。我们为计算比例方便起见,则宁用上列第十图上生之法。<sup>[2]60-61</sup>

我认为王光祈的意见是可取的。虽然王光祈明知《隋书·律历志》在“壮进”律名下方注有“下生安运”,在十二律部律数统计中黄钟部为34律,应钟部为28律,又说清楚“自黄钟终壮进,一百五十律,皆三分损一以下生。自依行终于亿兆,二百九律,皆三分益一以上生。唯安运一律为终,不生”。<sup>[6]</sup>这表明“安运”律为“钱乐之三百六十律”中的最高音,应列在高于“亿兆”律一个“京房一日音差”的律位上。但他还是主张“宁用上列第十图上生之法。”这里我还可以补充一点理由,汉代京房在创立他的“六十律”时曾提出一条三分损益法的生律规则:“上生不得过黄钟之浊,下生不得及黄钟之清。”<sup>[7]</sup>用今天话来说:用三分损益法生律,必须在一个八度内进行,三分益一“上生”不得低于正律黄钟;三分损一“下生”不得高于半律黄钟。故在“京房六十律”中,若“色育”律如果用“依行”律三分损一“下生”,则生出的“色育”就会高于“半黄钟”,京房据“下生不得及黄钟之清”的原则,用了三分益一的“上生”,将其律位置于正律“黄钟”和正律“执始”之间。在“钱乐之三百六十律”中,“安运”律若用“壮进”律三分损一“下生”,则也会置于高于“半黄钟”的律位上,故王光祈说“安运一律,本来是应该由壮进上生而得的,其数为0.00743,位当在黄钟、色育之间”,这是合情合理的。从律学的角度来说,假设的“半黄钟”和由“壮进”律三分损一“下生”所得半律“安运”之音差,与正律“黄钟”和由“壮进”律三分损一“下生”所得半律“安运”之音差,两者都是一样的。这在西方五度相生律的律学计算中已有先例,此律制只有相当于“三分损一”的“下生”五度生律法,而无“三分益一”的“上生”的生律法,故自C生出G之后,无论向高音方向或向低音方向生律都会越出八度,因此在构成音阶时都要一次次移低或移高八度。出于这样的考虑,故我在计算“安运”律的律高时,接受王光祈“我们为计算比例方便起见,宁用上列第十图上生之法”的建议,改用了由“壮进”律三分益一“上生”之法,把“安运”律作为正律置于正律“黄钟”和正律“色育”之间。使它和正律“黄钟”之间构成一个“钱乐之大音差”,和正律“色育”之间构成一个“钱乐之小音差”。这样就能清晰地显示出一个“钱乐之大音差”和一个“钱乐之小音差”合起来就是一个“京房一日音差”。由此在一定程度上充实和完善了三分损益律这一律制如下的音差系列:

- (1) 一个“钱乐之大音差”和一个“钱乐之小音差”构成一个“京房一日音差”;
- (2) 六个“京房一日音差”和一个“钱乐之小音差”构成一个“京房最大音差”;
- (3) 五个“京房一日音差”和一个“钱乐之小音差”构成一个“京房减一日音差”;
- (4) 四个“京房最大音差”和一个“京房减一日音差”构成“大半音”;

参见本文第一节表格中之“安运”律位。

(5) 三个“京房最大音差”和一个“京房减一曰音差”构成“小半音”；

(6) 五个大半音和七个小半音构成三分损益十二律。

如果当时钱乐之再用三分损益法生律305次，则成665律，这样可以在664个律间中只存在306个“钱乐之大音差”和358个“钱乐之小音差”两种音差。

这一套三分损益律音差系列的形成，是律学家京房和钱乐之在中国律学史上所作出的贡献，因此我主张在“京房六十律”和“钱乐之三百六十律”中五种音差名之前要冠以京房和钱乐之的名字，以示对这两位律学家的尊重。

最后要感谢李宏峰博士，正是于由他对“钱乐之小音差”的发现，才促使我对“钱乐之三百六十律”中的音差和三分损益律音差系列的再认识而草成了本文。不当之处，还望李博士和读者们批评指正。

#### 参考文献：

- [1]田边尚雄.音乐原理[M].东京：内田老鹤圃发行所，1922：346.
- [2]王光祈.东西乐制之研究[M].冯文慈，俞玉滋，选注//王光祈音乐论著选集(下).北京：人民音乐出版社，1993.
- [3]陈应时.中国古代文献记载中的“律学”[J].中国音乐，1987(2).
- [4]李宏峰.“钱氏音差”解析[J].南京艺术学院学报（音乐与表演版），2008(1).
- [5]陈应时.“京房六十律”中的三种音差[J].中国音乐，2007(1).
- [6]魏征等.隋书（第二册）[M].北京：中华书局，1973：397-401.
- [7]司马彪.后汉书[M].上海：中华书局，1965：3001.

（责任编辑：王晓俊）

---

### Three kinds of tone difference in “Qian Lezhi's 360 temperament”

Chen Yingshi

[Abstract]The problem of tonal difference in “Qian Lezhi's 360 temperaments” was emphasized by scholars at home and abroad. After recalculation the author discovered that there existed three kinds of tonal difference among 359 temperaments. The main part, “JingFang tonal difference” is totally 305, and the remaining 54 temperament are unique in “Qian's tonal difference”, which are 53 small tonal differences and 1 large tonal difference. The occurrence of large and small tonal difference enlarged and improved circle of fifths temperament.

[Key Words]Qian Lezhi; 360 temperaments; Jingfang tonal difference; large tonal difference; small tonal difference